


Анализ динамической устойчивости с помощью построения адаптивных квадратичных функций Ляпунова

Грязина Е., Турицын К.
SkolTech, MIT

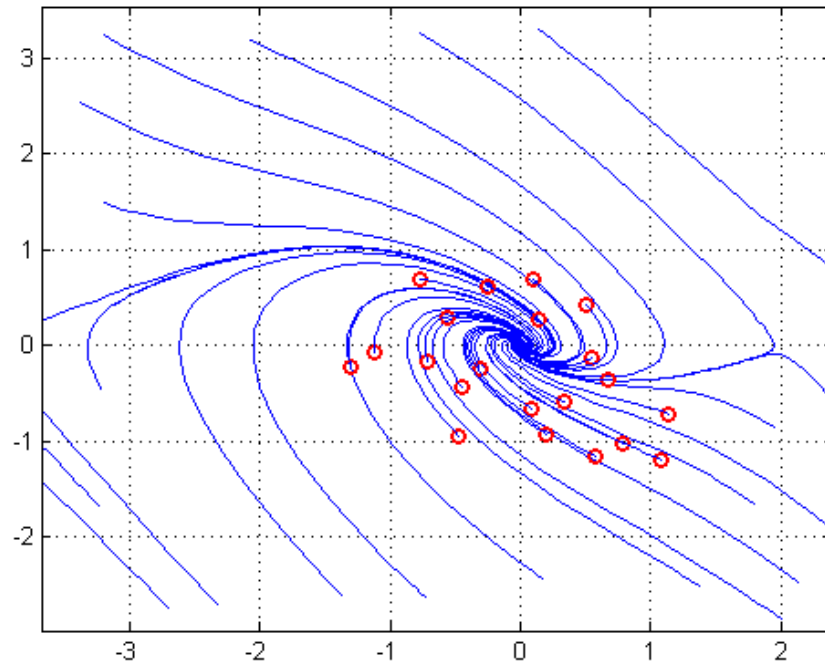
Skoltech

Skolkovo Institute of Science and Technology

 In collaboration with
Massachusetts Institute of Technology

Предисловие

- Прямые методы
vs
Численное моделирование



- Наша цель: уменьшить вычислительную нагрузку и консерватизм
- Метод: сертификаты устойчивости

Модель

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega$$

$$M \frac{d\omega}{dt} = p - D\omega - \nabla^T B \sin(\nabla \delta)$$

$\delta, \omega \in \mathbb{R}^n$: Generator rotor angles and velocities

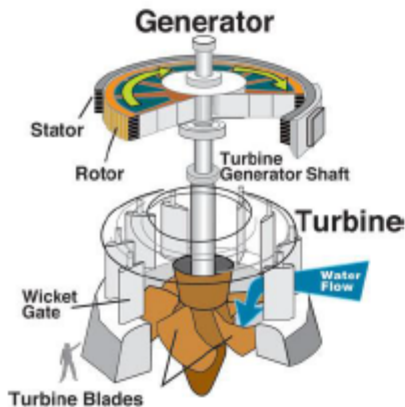
$p \in \mathbb{R}^n$: Mechanical power (torque)

$M = \text{diag}(m) \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Turbine inertia

$D = \text{diag}(d) \in \mathbb{R}^{n \times n}$: damping/governor droop

$B = \text{diag}(b) \in \mathbb{R}^{m \times m}$: line susceptance (normalized)

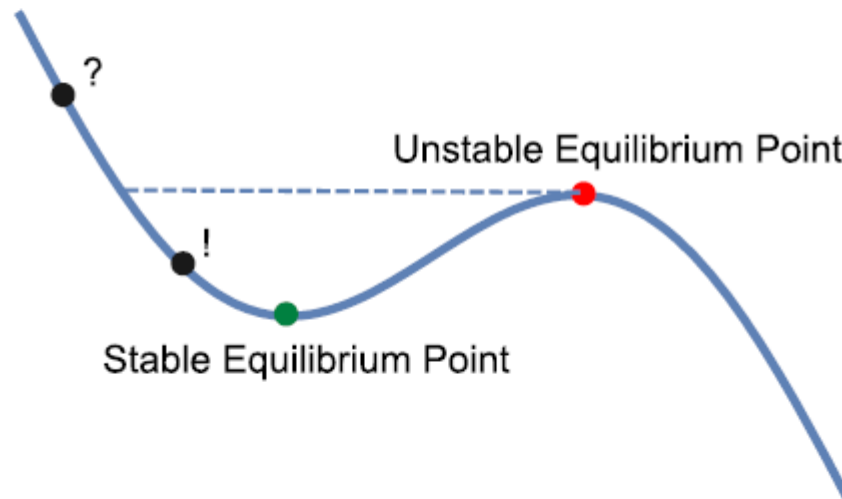
$\nabla \in \mathbb{R}^{m \times n}$: network incidence matrix



Энергетический метод

$$E = \frac{1}{2} \omega^T M \omega - b^T \cos(\nabla \delta) - p^T \delta$$

$$\frac{dE}{dt} = -\omega^T D \omega < 0$$



Stability certificate:

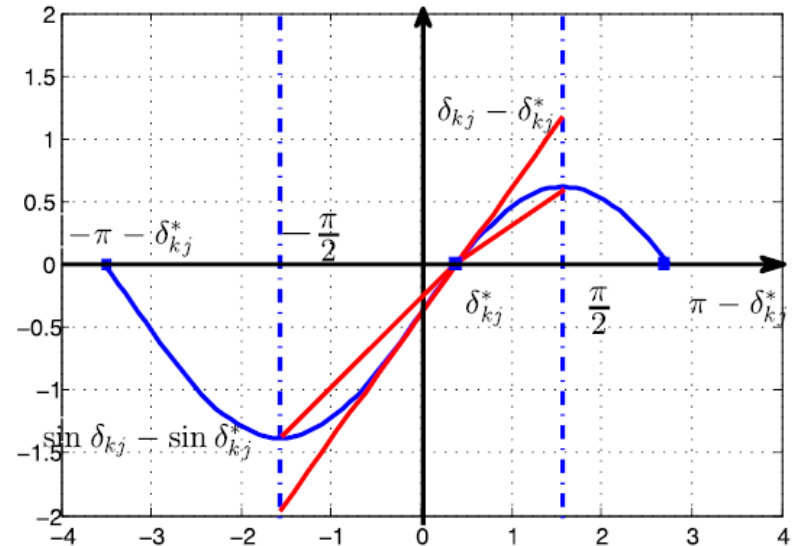
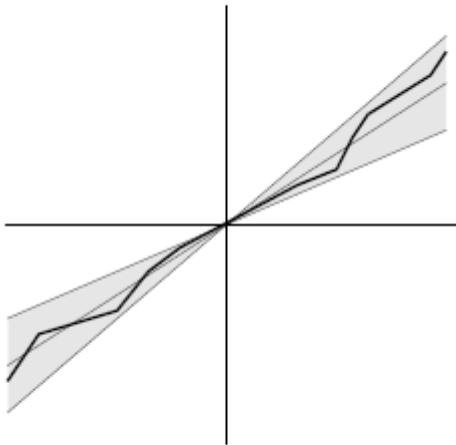
$$E(\delta, \omega) < E_{CUEP}$$

Секторные ограничения

$$m_k \ddot{\delta}_k + d_k \dot{\delta}_k + \sum_{j \in \mathcal{N}_k} a_{kj} (\sin \delta_{kj} - \sin \delta_{kj}^*) = P_k, \quad k = 1, \dots, |\mathcal{E}|$$

$$\dot{x} = Ax + B\phi(Cx)$$

$$\phi(Cx) = [(\sin \delta_{kj} - \sin \delta_{kj}^*)_{\{k,j\} \in \mathcal{E}}]^T$$



Lurie, Postnikov (1944), Jury (1965),
Piatnitsky (1983), Boyd (1994)

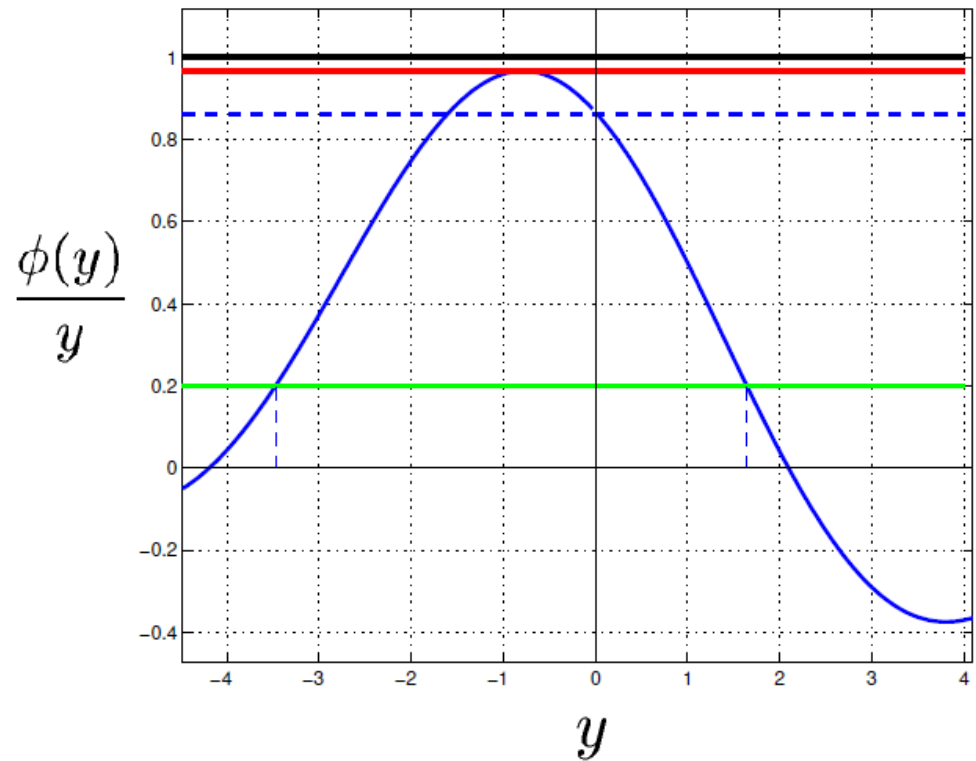
Turitsyn, Vu (2015)

Ограничивающий параллелепипед Π :

$$\underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i \implies (\phi_i(y_i) - l_i y_i) (k_i y_i - \phi_i(y_i)) \geq 0$$

Интервалы для секторов

$$ly \leq \phi(y) \leq ky$$



$$\underline{k}_i \leq k_i \leq \overline{k}_i$$

$$\underline{l}_i \leq l_i \leq \overline{l}_i$$

Ограничивающий параллелепипед П:

$$\underline{y}_i \leq y_i \leq \overline{y}_i \implies (\phi_i(y_i) - l_i y_i) (k_i y_i - \phi_i(y_i)) \geq 0$$

Линейные матричные неравенства

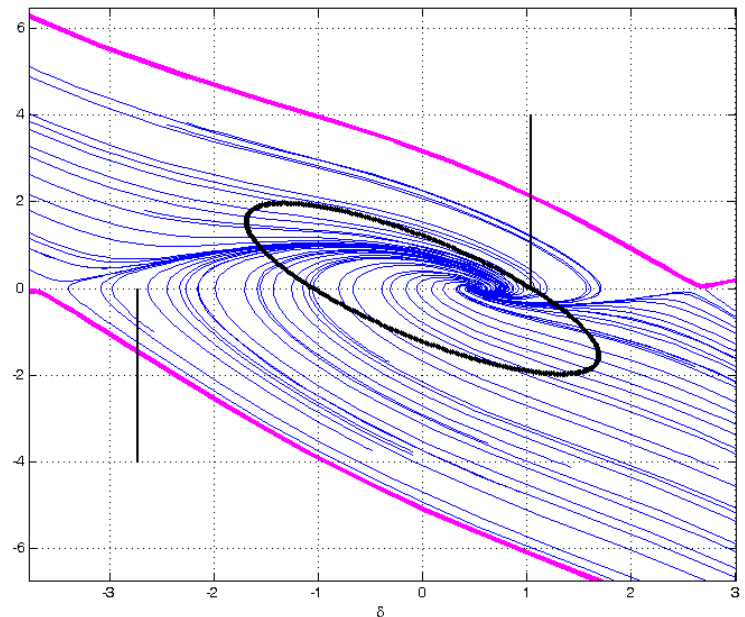
Если существует $P \succ 0$ такая что

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T D K L C & PB + \frac{1}{2} C^T D (K + L) \\ B^T P + \frac{1}{2} D (K + L) C & -D \end{bmatrix} \preceq 0.$$

Тогда $V(x) = x^T P x$ квадратичная функция Ляпунова и

сертификат устойчивости имеет вид:

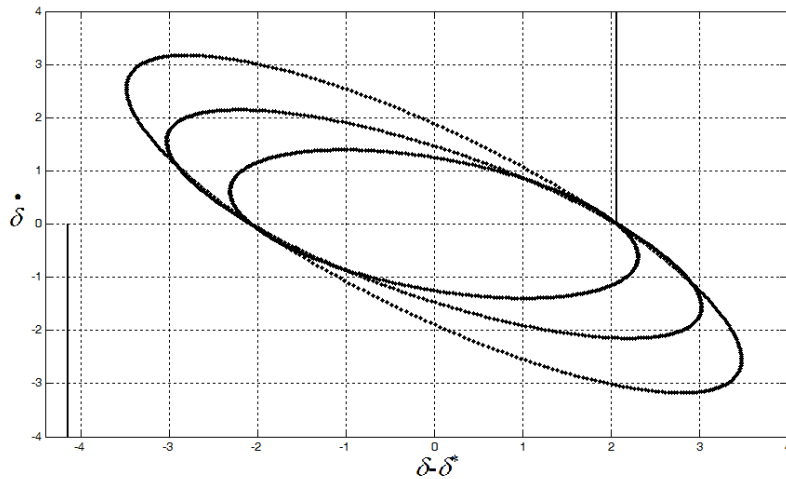
$$\begin{aligned} x^T P x &\leq V_{\min} \\ &\parallel \\ &\min x^T P x \\ &x \in \partial \Pi \end{aligned}$$



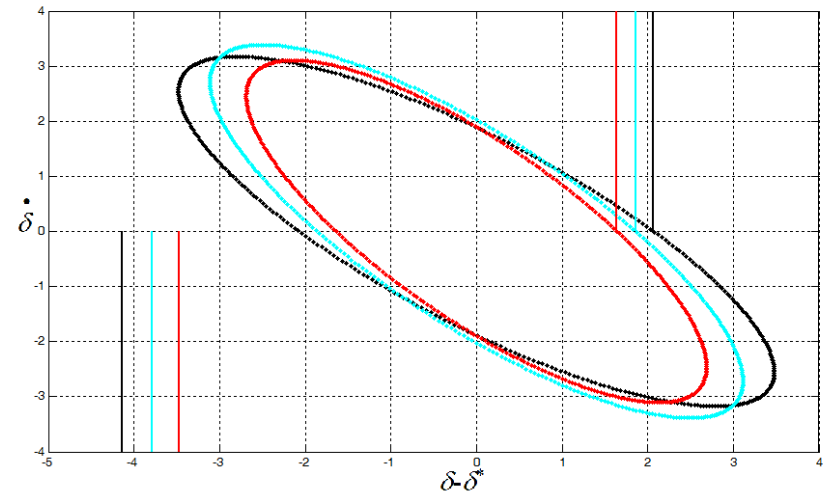
Улучшение сертификата устойчивости

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T D K L C & PB + \frac{1}{2} C^T D (K + L) \\ B^T P + \frac{1}{2} D (K + L) C & -D \end{bmatrix} \preceq 0 \quad \begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T D K L C & PB + \frac{1}{2} C^T D (K + L) \\ B^T P + \frac{1}{2} D (K + L) C & -D \end{bmatrix} \preceq 0$$

- Оптимизация по P
матрица P отвечает за форму эллипсоида, “вращение” эллипсоида



- Оптимизация по K и L
влияние на ограничивающий параллелограмм



Поиск оптимальных секторных ограничений

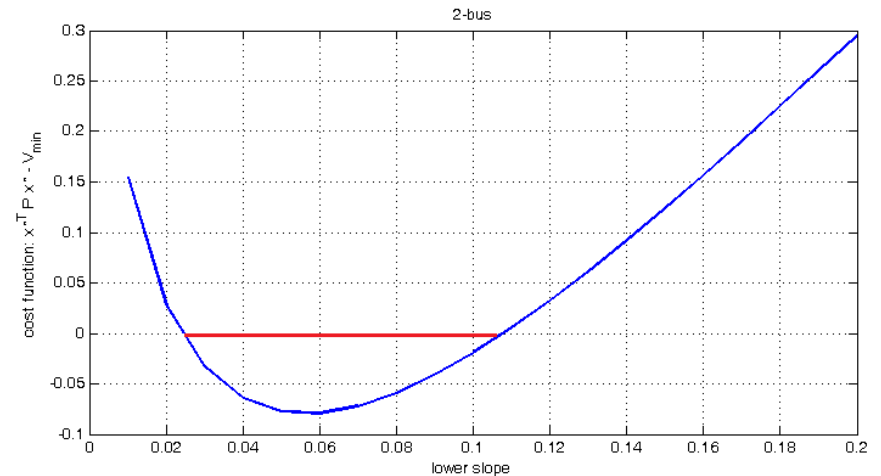
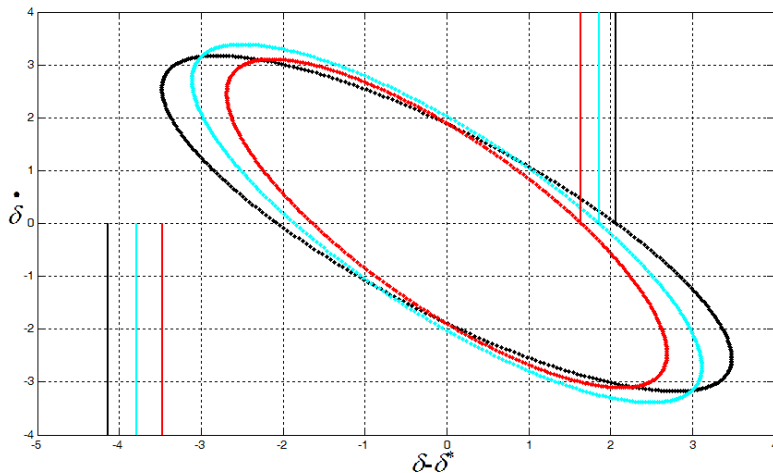
$$\min(x^*)^T P x^* - V_{\min}(P, K, L)$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A - C^T D K L C & P B + \frac{1}{2} C^T D (K + L) \\ B^T P + \frac{1}{2} D (K + L) C & -D \end{bmatrix} \preceq 0$$

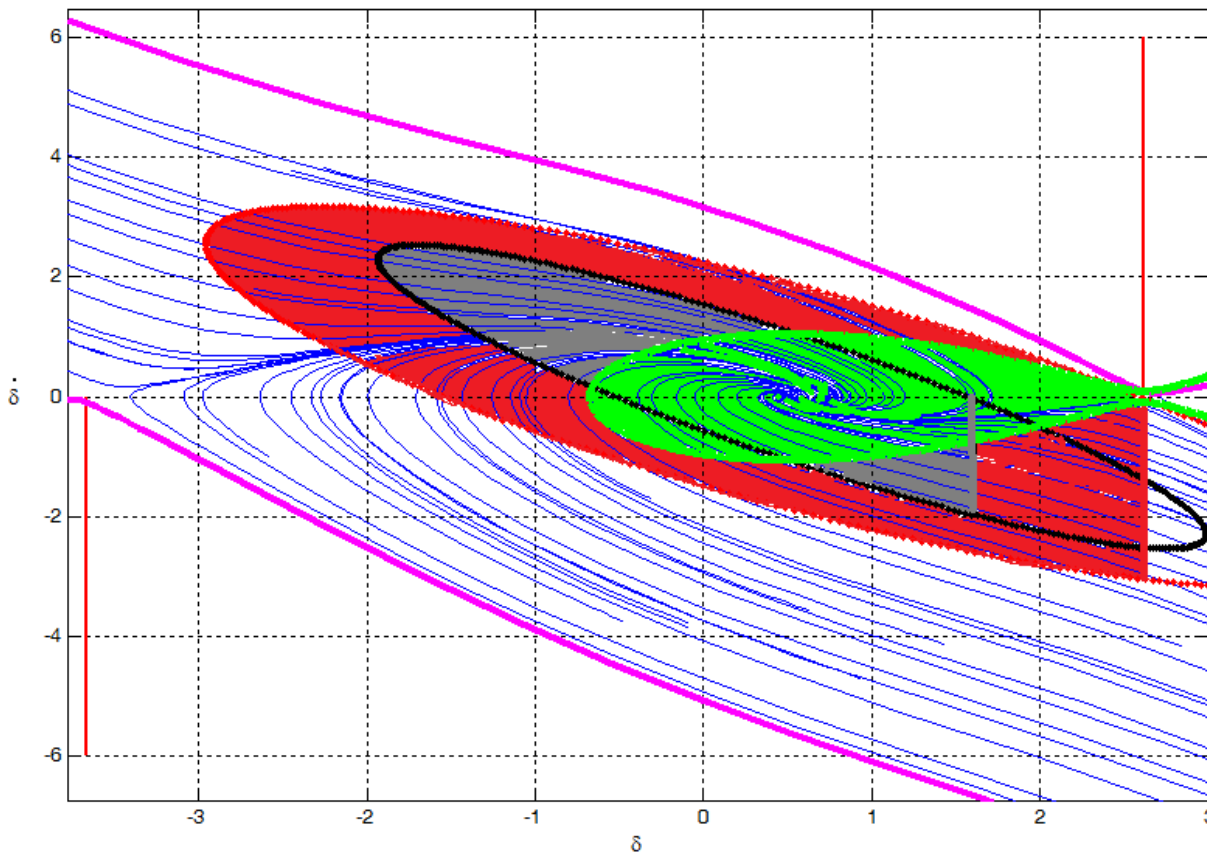
$$P \succ 0$$

$$\underline{k}_i \leq k_i \leq \overline{k}_i$$

$$\underline{l}_i \leq l_i \leq \overline{l}_i$$



Сравнение с энергетическим методом и стандартными секторами ограничения



Выводы

- Независимый выбор секторных ограничений уменьшает консерватизм прямых методов – сертификат охватывает большую область состояний
- **Возможность:** Построение базы данных сертификатов для различных сценариев потери динамической устойчивости. Уменьшение объема вычислений.
- **Следующие шаги:**
тестирование на реалистичных примерах
оптимизационный подход к поиску
(уточнению) двухмашинного эквивалента
относительно сечения асинхронного хода



Спасибо за внимание!



Let there be light!

Дополнения

Skoltech

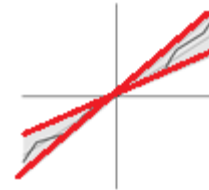
Skolkovo Institute of Science and Technology



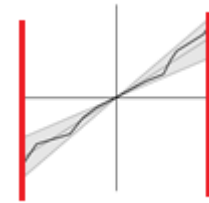
In collaboration with
Massachusetts Institute of Technology

Main components

- Sector bounds



- Bounding polytope



- Linear matrix inequality

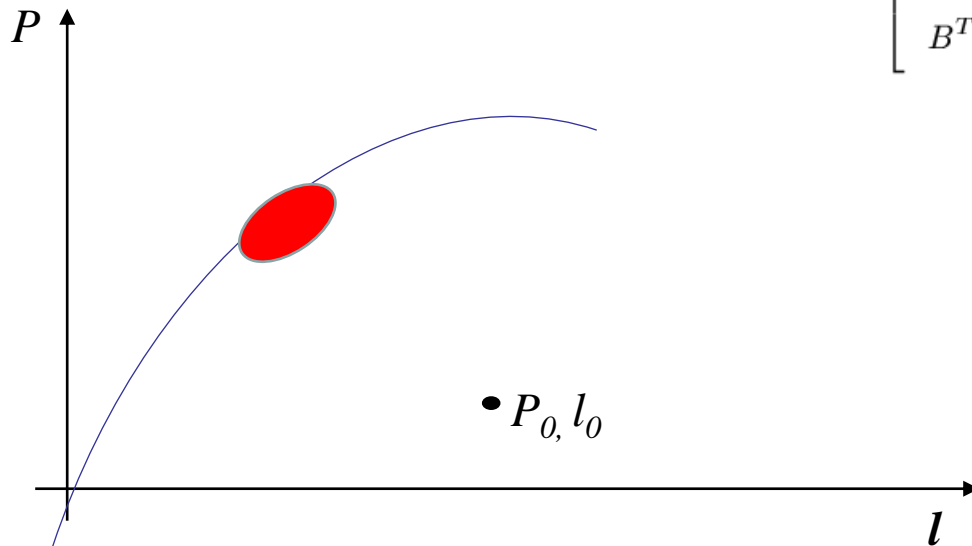
$$[\] \succ 0$$

- Stability certificate (ellipsoid)

$$x \in \mathcal{E}$$



Steps of the algorithm



$$\min(x^*)^T P x^* - V_{\min}(P, K, L)$$

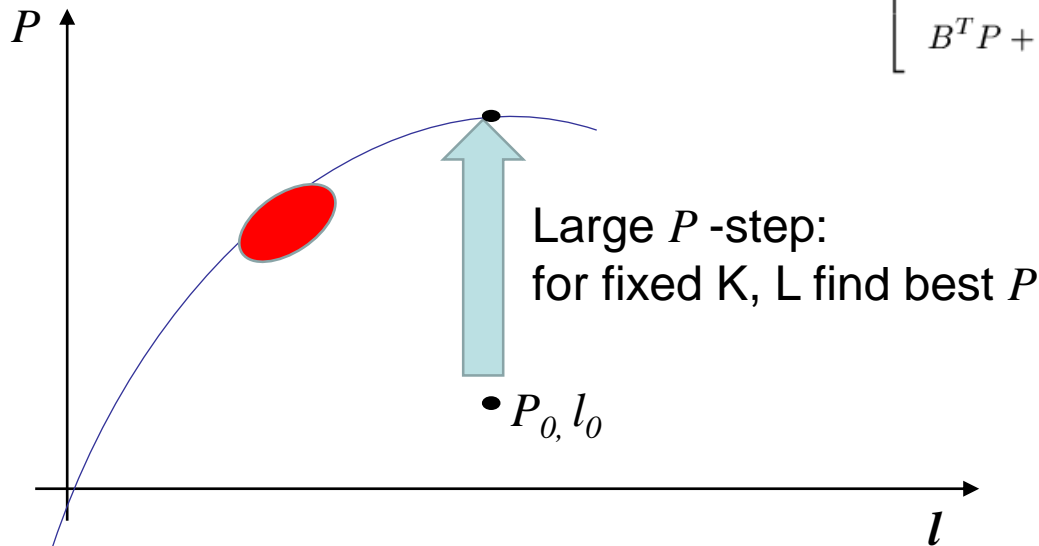
$$\begin{bmatrix} A^T P + P A - C^T D K L C & P B + \frac{1}{2} C^T D (K + L) \\ B^T P + \frac{1}{2} D (K + L) C & -D \end{bmatrix} \preceq 0$$

$$P \succ 0$$

$$\underline{k}_i \leq k_i \leq \bar{k}_i$$

$$\underline{l}_i \leq l_i \leq \bar{l}_i$$

Steps of the algorithm



$$\min(x^*)^T P x^* - V_{\min}(P, K, L)$$

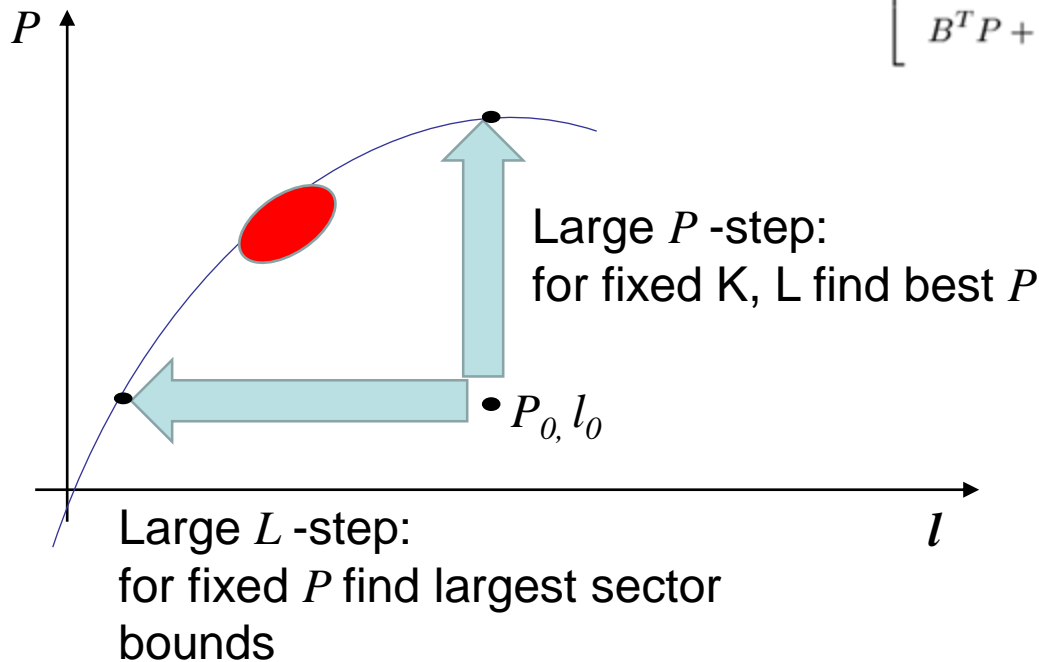
$$\begin{bmatrix} A^T P + P A - C^T D K L C & P B + \frac{1}{2} C^T D (K + L) \\ B^T P + \frac{1}{2} D (K + L) C & -D \end{bmatrix} \preceq 0$$

$$P \succ 0$$

$$\underline{k}_i \leq k_i \leq \bar{k}_i$$

$$\underline{l}_i \leq l_i \leq \bar{l}_i$$

Steps of the algorithm



$$\min(x^*)^T P x^* - V_{\min}(P, \underline{K}, \underline{L})$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A - C^T D \underline{K} L C & P B + \frac{1}{2} C^T D (\underline{K} + \underline{L}) \\ B^T P + \frac{1}{2} D (\underline{K} + \underline{L}) C & -D \end{bmatrix} \preceq 0$$

$$P \succ 0$$

$$\underline{k}_i \leq \underline{k}_i \leq \bar{k}_i$$

$$\underline{l}_i \leq \underline{l}_i \leq \bar{l}_i$$

Steps of the algorithm

$$\min(x^*)^T P x^* - V_{\min}(P, K, L)$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A - C^T D K L C & P B + \frac{1}{2} C^T D (K + L) \\ B^T P + \frac{1}{2} D (K + L) C & -D \end{bmatrix} \preceq 0$$

$$P \succ 0$$

$$\underline{k}_i \leq k_i \leq \bar{k}_i$$

$$\underline{l}_i \leq l_i \leq \bar{l}_i$$

